
سازمان اسناد و کتابخانه ملی
جمهوری اسلامی ایران



هو

رسالة فی حل مسائل السبع من الجبر و فیه ایراد قواعد شتی نفیسة مهمة فی حلها و حل سایر المسائل المشکلة الحسابیة

بسم الله الرحمن الرحیم

منت بی عد و احصا آفریدگاری را که واحدی راست کربد و دان
دارای عطابخش خطاپوش و خداوند مهرچهر فرشته هوش
شاهنشاه عصر و خسرو دهر قهرمان عالم و خلاصه نقاوه بنی آدم
وارث اورنگ کیان حارس ممالک ایران و مروج قواعد
ملت و ایمان پادشاه عقده بند گشود گشا سایه خداوند یکتا
السلطان بن السلطان بن السلطان ابو النصر و الفتح
ناصر الدین شاه قاجار خلد الله سلطانه و ادام الله
دولته پایه علوم بر فرق فرقدان رسیده و هر گونه دانش
و صنعتی درجه کمال گزیده کودکان دبستان از حسن تربیت
پادشاه کامکارش از دانایان سابق گوی سبق ربوده و جوانان
نوآموز از جهت حل کثیری از رموز بر دانشمندان سلف
برتری و تفوق جسته اشکال اشکال مشکله باقیه تا

کنون باندک توجه متعلمین مدرسه دار الفنون سهل و
منحل کردیده و ابکار افکار از چهره ضمیر بحجره تحریر
جلوه ظهور یافته و در صحایف و رسائل صورت
ثبات بلکه رسم طبع و انطباع پذیرفت که عامه طالبین
انشاء الله محظوظ و بهره یاب کردند فنحمده علی نعمائه و
نشکره علی آلائه و نصلی و نسلم علی النبی و آله و بعد
چون در روزنامه وقایع دولت علیه نواب مستطاب والا
تبار مهر سپهر مجد و اقتدار خورشید فلک فضل و افتخار شهزاده
آزاده اعتضاد السلطنه وزیر العلوم علیقلی میرزا دام اجلاله
العالی بجهة تشویق اهل دار الفنون تعریف و تحسین شاکردان
مدرسه مذکوره در مراتب علوم حساب و هندسه و غیرها
نموده بودند بعضی از مدعیان علوم از هر طرف بنای
مجادله کذاردند که کفته اند ۵ هر که کردن بدعوی فرازد
دشمن از هر طرف بر او تازد بعضی از آنقوم سؤال
از حل بعض مسائلی نمودند که در آخر کتاب خلاصة الحساب
قدوة المحققین و اسوة المدققین الشیخ بهاء الدین
العاملی اعلی الله مقامه ایراد یافته و مدعیست که



بعض دیگر سؤال از بعضی مسائل دیگر نمایند لهذا این بنده
عبد الغفار ابن الاستاد الفاضل و النحریر الکامل علی محمد آرانی اصفهانی
در صدد تحقیق جواب این مسائل بر آمده عرض مینماید که عماد
الدین خوام بغدادی که یکی از علمای متقدمین در حساب و
هندسه است کتابی مبسوط در علم حساب هوائی نوشته
مسمی بفوائد البهائیه و در اخر ان کتاب سی و سه مسئله از
مسائل مشکله ایراد نموده و در ضمن ان بیان نمود که ما
نمیگوئیم که این مسئلها جواب ندارد بلکه میگوئیم که ما
نمیتوانیم این مسائل را جواب بگوئیم و اگر کسی از عهده حل
این مسائل براید بد رستی که خدا بتعالی عطا نموده است باو
از علم و فهم چیزی را که بما عطا نفرموده است و چونکه خلاصه
جناب شیخ اعلی الله مقامه مختصری است از ان کتاب لهذا آن
مسائل را مختصر فرموده اکتفا بهفت مسئله نموده اند و جهة
انکه عماد الدین خوام اعتراف نموده بعجز خود و سایرین
علمای ان عصر از حل ان مسائل انستکه در حل این
مسائل محتاج میشوند بمعادلات چندی که غیر از مسائل
سته جبریه مشهوره است و بتصرفات غریبه که بدون

سیقین

منعقد مبین نرسیده چنانکه معلوم خواهد شد انشاء الله
وجمیع این مسائل در این ایام از تاثیر اکسیر تربیت
بندگان اقدس شهریاری روح العالمین فداه منحل شده
جواب هر یک از آنها واضح است بطریقی که مفصلا مذکور
میشود بواسطه آنکه بحمد الله جمیع معادلات جبریه برای بندگان
وسایر اهل دار الفنون سهل و آسان است از هر درجه
که باشد میتوانیم از عهده حل آن برآییم چه مسائلی که
بصد مرتبه از اینها مشکل تر بوده حل نموده ایم ومع
ذلک معترفیم بعجز و قصور خود و شاید مسئله یافت
شود که ما نیز عاجز باشیم از حل آن قال الله تبارک و تعالی
وَمَا اُوتِیتُم مِنَ العِلمِ اِلّا قَلِیلا و بهمان قدر که متعلمین علم
هندسه و توپخانه در علم جبر و مقابله ترقی دارند
در سایر علوم ریاضی از قبیل حساب و هندسه و علم
مساحت و علم مثلثات ولوکاریتم وجغرافیا و مناظر
و مرایا نیز ترقی دارند بلکه هر متعلمی در علم منسوب باو
مانند فزیک خوانان و اطبا و غیرهم بهمین مراتب در
علم خود ترقی کرده اند بواسطه آنکه سرکار نواب اشرف

والا وزیر علوم که مدرسه مبارکه دار الفنون ومتعلمین ان
که سپرده بایشان است خود در جمیع این علوم ماهر و با
بصیرتند و اهتمام ایشان در تربیت انها بی اندازه است که
لهذا نمیتوانند در تحصیل کوتاهی نمایند واز اینجهة است که
هر یك از انها در مدة یکماه بقدری که در دو سه ماه ترقی
نمیکردند ترقی نموده اند عبث مردم خود را در امتحان انها
زحمت میدهند ای مگس عرصه سیمرغ نه جولانگه تو است
عرض خود میبری و زحمت ما میداری باری چونکه صاحب
خلاصه هفت مسئله ایراد نموده بودند بر تحقیق جواب همان
هفت مسئله اکتفا میکنیم وده قاعده که باصطلاح اهل اوروپا
فرمول میگویند از استنباطات خاطر خود که لازم میشود دانستن
انها در حل این مسائل و نظایر انها در این مختصر رساله درج
مینمائیم و ختم مینمائیم انرا باایراد یك تساوی مشکلی
که انرا بر تبعیت و سه وجه حل نمرده ام و بیان میکنم در
ضمن ان یکقاعده نادره اسان از استنباط خاطر خود
نیز که کفایت میکند در حل جمیع معادلات جبریه که مشتمل
باشند بر دو مجهول بیان نماده که جواب انها بقوا عدا هل

اوروپا

اروپا خالی از صعوبت و اشکال نیست مخفی نماند
که آنچه از کتب علمای حساب و جبر و مقابله ایران و مغرب
زمین بنظر رسیده جمیع عبارت را بصراحت بیان میکنند
جز صفر و اعداد را که باین علامات ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵
و ۶ و ۷ و ۸ و ۹ بیان کرده اند امّا اهل اروپا تصرّف نموده
تسهیل در عمل کرده اند و اکثر مطالب را بنشان و علامات
بیان میکنند مثلاً علامت جمع این است + و علامت
تفریق این است − و علامت جذر این است √ و علامت
مال کعب کعب کعب کعب این است کا ^{17}
و هکذا و باین سبب بسیار مطالب بوجه مختصر و آسان
بیان می شود مثلاً اهل ایران در زمان قدیم مینوشتند
ضلع اول از ۲۵۶ بنا بر آنکه مال کعب الکعب فرض
شود جمع شود با ضلع اول ۲۴۳ بنا بر آنکه
مال کعب فرض شود حاصل مساوی است به پنج
و اهل اروپا این مطلب را باین طور مینویسند

$$\sqrt[8]{256} + \sqrt[5]{243} = 5$$



بنا بر این چون اختصار و تسهیل در عمل مطلوب است نه تقلید
قدما لابد ما نیز محتاج شدیم بوضع علامات و چون اهل مدرسه
دار الفنون بکتب فرانسه مانوس اند بعلامات انها اکتفا کرده اند
چه مقصودی جز اختصار و تسهیل عمل چیزی دیگر نیست و هر دوی اینها بعلاماتی
که اهل فرانسه وضع نموده اند حاصل میشود علاوه بر این در بطون
المطالع که از کتب ایشان که بی فائده نیست نیز حاصل میگردد بخلاف
انکه اصطلاح جدید و علامات تازه وضع میکردیم این فائده مفقود
بود و اگر کسی این علامات را نداند جرمی بر ما نیست و بحثی بر ما
وارد نمی آید بلی المرء عدو لما جهل اما بیم بر سر مقصود و بالله
التوفیق **المسئلة الاولی** عشرة مقسومة بقسمین اذا زید علی
کل جذره وضرب المجتمع فی المجتمع حصل عدد مفروض **جواب**
مخفی نیست که بگوییم مقصود سائل از تقسیم نمودن عشره بدو قسم
یا بدو قسم است که هر قسمی عدد صحیح باشد و آن منحصر است به پنج صورت
(۱ ، ۹) (۲ ، ۸) (۳ ، ۷) (۴ و ۶) (۵ و ۵) و معلوم است که
جز صورت اولی با هیچکدام از آن دو قسمت مجذور حقیقی نیستند
مانند ۳ و ۷ و ۲ و ۸ یا انکه یك قسمت آن مجذور حقیقی است
قسمت دیگر آن اصم است مثل چهار و شش یا انکه مقصودش تقسیم
بدو

بدو قسمت کیفما کان اعم از انکه هر دو قسمت صحیح مع الکسر باشد

یا یکی کسر فقط باشد و دیکری صحیح مع الکسر و علی ای نحو کان

اکر یک قسمت منطق باشد قسمت دیکر لامحاله اصم خواهد بود

باری اکر مقصود سائل ان باشد که باید تقسیم نمود عشره را

بدو قسمت صحیح منطق منحصر است جواب باینکه یک قسمت عشره

عدد یک باشد و قسمت دیکر عدد نه و قول سائل که کفته است

حصل عدد مفروض لامحاله ان عدد باید ۲۴ باشد و اکر بکوییم

که مقصودش تقسیم عشره است بدو قسمت صحیح اکر چه هر دو قسمت

یا یک قسمت عدد اصم باشد بر سائل لازم است که تعیین عدد

مفروض نماید مثلا بکوید حصل عشرون او حصل ثلثون او

حصل خمسون تا ما بیان کنیم که جواب مسئله چیست و یا انکه مسئله

مستحیل است زیرا که نتیجه این اعمال لامحاله اعداد مخصوصه

معینه است پس اکر سائل همان اعداد را فرض کرده باشد سوال صحیح است

والا سوال غلط خواهد بود و اکر بکوییم که مقصودش تقسیم

نمودن عشره است بدو قسمت کیفما کان در این صورت عدد

مفروض زیاده از پنجاه و دو نمیتواند بود تقریبا زیرا که بزرکترین

حاصلی که پیدا میشود از این اعمال وقتی است که تقسیم نماییم عشره را

بد و قسمت متساوی نتیجه آن یازده از پنجاه و دو و بیست دقیقه تقریبا

و بر سائل لازم است که عدد مفروض را معین نماید و چون

سائل فرض این حدود را ننموده ما سی و پنج فرض نمودیم و صورت

مسئله این خواهد شد عشرة مقسومة بقسمین کیفما کان

اذا زید علی کل جذره التقریبی او التحقیقی و ضرب المجتمع فی

المجتمع حصل خمسة وثلثون تقریبا جهة جواب این مسئله فرض

میکنیم یکی از دو قسمت عشره را x^{2} پس قسمت دیگر این میشود

$10-x^{2}$ و پس از آن این تساوی حاصل میشود*

*$(x^{2}+x)\sqrt{10-x^{2}}-x\ldots=35$

وازان $10x^{2}+10x-x^{2}-x^{3}+(x^{2}+x)\sqrt{10-x}=35$

و پس از آن $\frac{35-10x^{2}-10x+x^{2}+x^{3}}{x^{2}+x}=\sqrt{10-x}$

واز اینجا $x^{8}+2x^{7}-19x^{6}-40x^{5}+150x^{4}+$

$+270x^{3}-900x^{2}-700x+1225=$

$-x^{6}-2x^{5}+9x^{4}+20x^{3}+10x^{2}$

واز اینجا $x^{8}+2x^{7}-18x^{6}-38x^{5}+141x^{4}+$

$+250x^{3}-910x^{2}-700x+1225=0$

پس عمل منتهی شد بیک تساوی مخلوطی از درجه هشتم که شامل



هشت جواب را ولیکن جواب‌هائی که صدق میکند در این مسئله

دو جوابست ۱٫۸۲۱۱۹ = شیء

۸٫۱۷۸۸۱ = شیء وچون عدد یکی از دو قسمت عشره

فرض شده بود پس جواب اول یکقسمت از ده و جواب دوم

قسمت دیگر است یعنی باید ده را تقسیم نمود باین دو قسمت

تا انکه بعد از عمل حاصل مساوی ۳۵ شود و سبب عجز قدما

از حل مسئله آنست که منتهی میشود عمل باین معادله یکمال الکعب

الکعب بعلاوه دو مال کعب بعلاوه ۱۰۱ مال المال بعلاوه

۲۵۰ کعب ۱۲۲۵ عدد مساوی میشود بر ۱۸ کعب الکعب بعلاوه

۸۳ مال الکعب ۱۰۱ مال بعلاوه ۷۰۰ شیء و بر هر محاسبی

معلوم است که قدما عاجز بوده اند از حل اینگونه معادلات

المسئلة الثانية مجذوران زدنا عليه عشرة كان للمجتمع جذر

او نقصناها منه كان للباقي جذر **جواب** هرگاه بگوئیم که

مجذوران بصیغه تثنیه خوانده میشود و ضمیر علیه را بتاویل باو راجع

کنیم که حاصل معنی عبارت چنین شود که دو مجذور است که هرگاه زیاد

کنیم بر مجموع انها ده عدد یا کم کنیم از مجموع انها ده عدد بوده باشد

از برای مجتمع یا باقی جذر جواب میگوئیم که بنابر این معنی دو ... حاصل



ست

احتمال اول اینکه یکی از دو شرط زیاده و نقصان کافی باشد در تحقق
صدق مسئله و احتمال ثانی انکه جمع بین الشرطین لازم باشد در تحقق
مسئله اما بنا بر احتمال اول و بنا بر فرض انکه مقصود شرط زیاد کردن
ده عدد باشد فرض میکنیم یکی از دو مجذورها را x^2 و دیگری را
y^2 و پس این تساوی حاصل است $x^2+y^2+10=z^2$ (1)

فرض میکنیم $z-x-y=A.$

$z=A+x+y.$

و $z^2=A^2+x^2+y^2+2Ax+2Ay+2xy.$

بعد از تفریق او از تساوی اول حاصل میشود $10=A^2+2Ax+2Ay+2xy.$

$(2A+2x)y=10-A^2-Ax.$

$y=\frac{10-A^2-2Ax}{2A+2x}.$

در اینجا مقادیر نامعین فرض شده است A و x

پس حاصل میشود بجهت A و x و y و z این مقادیر

$A=\dots\dots,\ 1,\ 2,\ 3,\dots\dots$

$x=\dots\dots\ 2,\ 2,\ 4\dots\dots$

$y=\dots\dots\ \frac{5}{6},\dots\dots$

$z=\dots\dots\ \frac{23}{6},\dots\dots$



دنبال

وبنا بر فرض انکه مقصود شرط نقصان ده عدد باشد فرض میکنیم
یکی از دو مجذور را x^2 ودیکری را y^2 پس این نسبت

حاصل است $x^2 + y^2 - 10 = z^2$

فرض میکنیم $x + y - z = A$

$$z = x + y - A$$

$$z^2 = x^2 + y^2 + A^2 - 2Ax - 2Ay + 2xy$$

$$-10 = A^2 - 2Ax - 2Ay + 2xy$$

$$(2A - 2x)y = A^2 - 2Ax + 10$$

$$y = \frac{A^2 - 2Ax + 10}{2A - 2x}$$

$A = \ldots\ldots\ 2,\ 3\ \ 4,\ \ldots\ldots$

$x = \ldots\ldots\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots$

$y = \ldots\ldots\ 5,\ 3\frac{1}{2},\ \ \ldots\ldots$

$z = \ldots\ldots\ 4,\ 2\frac{1}{2},\ \ ,\ \ldots\ldots$

وهرکاه مسئله را بطور کلی ادا کنیم باین طریق می شود

$$x^2 + y^2 \pm a = z^2$$

بعد از عمل کردن این فرمول حاصل میشود $y = \dfrac{a - 2Ax \mp A^2}{2A \pm 2x}$



اما بنا بر احتمال ثانی فرض میکنیم دو مجذور را یکی

x^2

و دیگری y^2 پس این دو تساوی حاصل است

$$x^2+y^2+10=z^2$$

$$x^2+y^2-10=v^2$$

حال هرگاه عمل کنیم در تساوی اول بتنهائی حاصل میشود جهة x و y دو سلسله مقادیر و هرگاه عمل کنیم در تساوی دوم بتنهائی حاصل میشود نیز جهة x و y دو سلسله مقادیر دیگر جستجو میکنیم در دو سلسله مقادیر اول دو مقداری جهة x و y بطوریکه حاصل جمع مجذورشان مساوی شود بحاصل جمع دو مجذور x و y از دو سلسله مقادیر دوم پس بعد از یافتن دو مقدار حقیقی خواهند بود از x و y وجه دیگر فرض میکنیم این دو مجذور را یکی x^2 و دیگری y^2 پس این دو تساوی حاصل است

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2+10=z^2 \\ x^2+y^2-10=v^2 \end{array}\right\} \quad (1)$$

بعد از آنکه تفریق کنیم یکی از این دو تساوی را از دیگری این تساوی حاصل است

$$z^2-v^2=20 \quad (2)$$

حال فرض میکنیم تفاضل این ریشهای این تساوی را مساوی به A پس

$$z-v=A, \quad z^2=A^2+v^2+2Av$$

و بعد از گذاردن مساوی z^2 را در تساوی (۲) $A^2 + 2Av = 20$

پس (۳) $z = \frac{20+A^2}{2A}$, $v = \frac{20-A^2}{2A}$

حال در این تساوی A مقداریست نامعین پس بجهت z و v

جوابهای مالانهایة له حاصل میشود ولیکن میتوانیم این

مقادیر را در تساوی (۱) بگذاریم زیرا که $y^2 + x$ از تساوی

اسقاط شده است پس بجهت اینکه مقدار A را معین نمائیم مساوی

z^2 را در تساوی (۱) میگذاریم پس حاصل میشود این تساوی

$$x^2 + y^2 + 10 = \left(\frac{20+A^2}{2A}\right)^2 = \frac{400 + A^4 + 40A^2}{4A^2}$$

$$x^2 + y^2 = \frac{400 + A^4 + 40A^2}{4A^2} - 10 = \frac{400 + A^4}{4A^2}$$

حال با این قسم عمل میکنیم (۴) $x^2 + y^2 = \frac{400+A^4}{4A^2}$.

فرض میکنیم $x - y = B.$

و $x = B + y.$

و $x^2 = B^2 + y^2 + 2By$

بعد از گذاردن مساوی x^2 را در تساوی (۴) حاصل می شود

$$2y^2 + B^2 + 2By = \frac{400+A^4}{4A^2}.$$

و $y^2 + By = \frac{400+A^4}{8A^2} - \frac{B^2}{2} = \frac{400+A^4-4A^2B^2}{8A^2}.$

$$y = -\frac{B}{2} \pm \sqrt{\frac{400+A^4-4A^2B^2}{8A^2} + \frac{B^2}{4}} = \pm\sqrt{\frac{800+2A^4-4A^2B^2}{16A}}$$

فرض میکنیم $z - x = A$

$z = A + x$

$z^2 = A^2 + x^2 + 2Ax$.

بعد از گذاشتن او در تساوی (1) این تساوی حاصل است

$A^2 + 2Ax = 10$

پس $x = \frac{10 - A^2}{2A}$.

A در این تساوی مقدار نامعین است پس بجهة x حاصل

میشود این مقادیر

$A = \ldots\ 1,\ 2,\ 3$

$x = \ldots\ \frac{9}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{1}{6}$

و بجهة فرض ثانی از احتمال اول این تساوی حاصل است

$x^2 - 10 = z^2$ (1)

فرض میکنیم $x - z = A$.

$x = A + z$

$x^2 = A^2 + z^2 + 2Az$

پس از گذاشتن مساوی x^2 را در تساوی اول حاصل میشود

$A^2 + 2Az = 10$ و

$z = \frac{10 - A^2}{2A}$ و

$x = \frac{10 + A^2}{2A}$

و نیز A در اینجا مقدار نامعین است پس حاصل میشود بجهة x

و z این مقادیر

$$z = \frac{9}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{1}{6}$$

$$x = \frac{11}{2},\ \frac{7}{2},\ \frac{19}{6},\ \ldots$$

امّا بجهة احتمال ثانی این دو تساوی حاصل است

$$\left.\begin{aligned} x^2-10 &= y^2 \\ x^2+10 &= z^2 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

و بعد از تفریق یکی از دو تساوی از دیگری این تساوی

$$z^2-y^2=20$$

حاصل است

و بقاعده که مذکور شد در احتمال اول این دو تساوی حاصل آید

$$z = \frac{20+A^2}{2A}$$

$$y = \frac{20-A^2}{2A}$$

و A در این دو تساوی مقداری است نامعین پس بجهة z^2 و y^2 جوابهای ما لا نهایه حاصل میشود ولیکن نمیتوانیم این جوابها را در تساوی (1) بگذاریم زیرا که x^2 از اینجا اسقاط شده است پس باین قسم عمل میکنیم که $y^2 = \left(\frac{20-A^2}{2A}\right)^2$ بعد از وضع او در تساوی (1) این تساوی حاصل آید

$$x^2-10=\left(\frac{20-A^2}{2A}\right)^2$$



پس $x^2 = \frac{(20-A^2)^2}{4A^2} + 10 = \frac{400+A^4}{4A^2}$

در این تساوی چون x باید مقدار حقیقی باشد و $4A^2$
که مخرج است مجذور حقیقی است پس صورت کسر نیز باید
یک مجذور حقیقی باشد و فرض میکنیم او را مساوی q^2
پس این تساوی حاصل است $A^4 + 400 = q^2$

$A^4 = q^2 - 400$

و

$A^2 = R$

حال فرض میکنیم

$A^4 = R^2$

پس

$R^2 = q^2 - 400$

و

$R = \sqrt{q^2 - 400}$

q در اینجا مقدار ثابت نامعین ولیکن باید مقادیری فرض شود
که بعد از تفریق ۴۰۰ از او یک مجذور صحیح حاصل شود و بعد از آنکه
آن مقادیر را معین نمودیم آن ریشهها مساوی R میشود پس باید
نیز در آن مقادیر جستجو نمود از مقادیری که مجذور صحیح باشند زیرا که
R مساوی A^2 فرض شده بود پس بعد از آنکه آن مقادیر را یافتیم جذر
او مساوی است به A و باید دانست که نمیتوانیم بجهت q مقداری فرض
نمائیم که مجذور او کوچکتر از ۴۰۰ باشد زیرا اگر کوچکتر باشد باید

مانده منفی خواهد بود و عدد منفی جذر ندارد بوجه دیگر

بعد از آنکه در تساوی اول یعنی $x^2-10=y^2$

بتنهائی عمل کنیم بجهة x و y این مقادیر حاصل می‌شود

$$x=\frac{10+A^2}{2A}$$

$$y=\frac{10-A^2}{2A}$$

و بعد از آن که در تساوی دویم یعنی $x^2+10=z^2$

بتنهائی عمل کنیم بجهة x و z این مقادیر حاصل میشود

$$x=\frac{10-A_1^2}{2A_1}$$

$$z=\frac{10+A_1^2}{2A_1}$$

حال جستجو میکنیم در دو سلسله مقادیر x از دو تساوی دو مقداری که با هم مساوی باشند پس آن مقدار x حقیقی است زیرا که در تساوی اول اگر از مجذور x ده اسقاط کنیم باقی یک مجذور حقیقی است و اگر در تساوی دویم ده بر آن اضافه کنیم حاصل نیز یک مجذور حقیقی است بوجه دیگر

$$x^2-10=y^2$$

$$x^2+10=z^2$$

بعد از جمع نمودن دو تساوی این تساوی حاصل آید $2x^2=y^2+z^2$

و بعد از این در مسئله پنجم از این تساوی گفتگو خواهیم نمود

و باید دانست که مجذور مطلوب یعنی عـ٢ یافت نمیشود

در اعداد صحاح زیرا که تفاضل مجذورات در اعداد متوالیه نیست

١١ ٩ ٧ ٥ ٣

و در اعداد زوج این است ٢٤ ٣٦ ٢١ ٢٥ ١٢

و در اعداد فرد این است ٣٥ ٣٢ ٢٤ ١٦ ١

و در اعدادیکه تفاضل آن دو است این است ٢٣ ١٥

و در اعدادیکه تفاضل آن سه است این است ٥٦ ٢٣

پس یافت نمیشود دو مجذوری که تفاضل آنها ده باشد و نیز

یافت نمیشود این مجذور در اعداد کسور زیرا که هر کسری را

که از وده عدد نقصان کنیم باقی مانده عدد منفی است و عدد

منفی جذر ندارد پس در صورتی که بشرط در اعداد کسور

یا صحاح صدق نکند جمع بین الشرطین بطریق اولی صدق نخواهد

کرد المسئلة الثالثة اقر لزید بعشرة الا جذر مال لعمرو

ولعمرو بخمسة الا جذر مال الزید جواب فرض میکنیم مال

زید را عـ٢ و مال عمرو را يـ٢ پس از فرض مسئله حاصل

میشود بجهة زید يـ - ١٠ و بجهة عمرو عـ - ٥ پس این



دو تساوی حاصل است

$$\begin{cases} x^2 = 10 - y \\ y^2 = 5 - x \end{cases}$$

از تساوی اخری

$$x = 5 - y^2$$

و

$$x^2 = y^4 - 10y^2 + 25$$

بعد از گذاشتن مساوی x^2 را در تساوی اول

$$10 - y = y^4 - 10y^2 + 25$$

$$y^4 - 10y^2 + y + 15 = 0$$

بعد از عمل کردن در این تساوی حاصل میشود بجهت y^2 این

$$y^2 = 2.07329$$

و بجهت x^2 این

$$x^2 = 1.55975$$

وجه دوّم هم فرض میکنیم مال عمرو را y^2 پس مال زید

$$10 - y$$

میشود

و مال عمرو هم میگردد

$$5 - \sqrt{10 - y}$$

پس این تساوی حاصل است

$$y^2 = 5 - \sqrt{10 - y}$$

$$5 - y^2 = \sqrt{10 - y}$$

$$y^4 - 10y^2 + 25 = 10 - y$$

$$y^4 - 10y^2 + y + 15 = 0$$

$$y^2 = 2.07429$$



وجه سیم فرض میکنیم مال زید را x^2 پس مال

عمرو میشود $5 - x$.

و مال زید میشود $10 - \sqrt{5 - x}$.

پس این تساوی حاصل آید $x^2 = 10 - \sqrt{5 - x}$.

$$x^2 - 10 = -\sqrt{5 - x}$$

$$x^4 - 20x^2 + 100 = 5 - x$$

$$x^4 - 20x^2 + x + 95 = 0$$

بعد از عمل کردن در این تساوی حاصل میشود بجهة x

$$x = 2,9257$$

پس مال زید این میشود $x^2 = 8,55975$

وجه چهارم فرض میکنیم مال زید را x پس مال

عمرو میشود $5 - \sqrt{x}$

و مال زید میشود $10 - \sqrt{5 - \sqrt{x}}$

پس این تساوی حاصل آید $x = 10 - \sqrt{5 - \sqrt{x}}$

$$x - 10 = -\sqrt{5 - \sqrt{x}}$$

$$x^2 - 20x + 100 = 5 - \sqrt{x}$$

$$x^4 - 40x^3 + 590x^2 - 3800x + 9025 = 0$$

$$x^4 - 40x^3 + 590x^2 - 3801x + 9025 = 0$$

$$x = 8\ 55175$$

اکر چه بچند وجه دیکر این مسئله را حل نموده ام لیکن در اینجا همین چهار وجه اکتفا نمودیم **المسئلة الرابعة** عشرة مقسومة بقسمین اذا قسمنا کلا منهما علی الآخر وجمعنا الخارجین کان المجتمع مساویا لأحد قسمی العشرة جواب فرض میکنیم یکی از دو قسمت عشره را x پس قسمت دیکر $10 - x$ میشود

از اینجا این تساوی حاصل است $\frac{x}{10-x} + \frac{10-x}{x} = x$

$$x^2 + x^2 - 20x + 100 = 10x^2 - x^3$$

$$x^3 - 8x^2 - 20x + 100 = 0$$

پس

وبعد از عمل کردن در این تساوی حاصل میشود بجهة x

این دو جواب $x = 2,8784$

$$x - 8,9873$$

پس بجهة قسمت دیکر عشره این دو جواب حاصل است

$$10 - x - 7,1217$$

$$10 - x = 1,0127$$

یعنی این مسئله دو حالت دارد یکی آنکه تقسیم کنیم عشره را بدو

قسمت بطوری که بعد از عمل حاصل مساوی قسمت اصغر شود

۷,۱۲۱۷

و او این دو قسمت است ۲,۸۷۸۳

و دیگری انکه حاصل مساوی قسمت اعظم شود و او این دو قسمت

است **وجه ثانی** فرض میکنیم یکی از دو قسمت عشره را x و دیگری را y پس این تساوی حاصل است

$$x + y = 10 \quad (1)$$

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = x$$

$$x^2 + y^2 = x^2 y \quad (2)$$

$$x = 10 - y$$

و از تساوی اول

$$y^2 - 20y + 100 = x^2$$

$$y^2 - 20y + 100 + y^2 = y^3 - 10y^2 + 100y$$

$$y^3 - 22y^2 + 120y - 100 = 0$$

$$y = 7,1217$$

$$y_1 = 1,0127$$

وجه ثالث با انکه از تساوی اول $y = 10 - x$

$$y^2 = x^2 - 20x + 100$$

و

بعد از وضع او در تساوی دوم

$$2x^2 - 20x + 100 = 10x^2 - x^3$$

$$x^3 - 8x^2 - 20x + 100 = 0$$



$x = 2.8283$

$x_1 = 1.9872$

وجه رابع فرض میکنیم یکی از دو قسمت را x پس قسمت دیگر $10 - x$ است و پس از آن این تساوی حاصل است

$$\frac{x}{10 - x} + \frac{10 - x}{x} = 10 - x$$

$$x^2 + x^2 - 20x + 100 = x^3 - 20x^2 + 100x$$

$$x^3 - 22x^2 + 120x - 100 = 0$$

$x = 7.1217$

$x_1 = 1.0127$

وجه خامس

$$x + y = 10$$

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = y$$

$$x^2 + y^2 = xy^2$$

$$x^2 + y^2 = 100 - 2xy$$

$$xy^2 = 100 - 2xy$$

حال هرگاه فرض کنیم

$$x = 10 - y$$

پس

$$10y^2 - y^3 = 100 - 20y + 2y^2$$

و

$$y^3 - 8y^2 - 20y + 100 = 0$$

$y = 2,8783$

$y_1 = 8,9873$

وجه سادس واگر فرض کنیم $y = 10 - x$

$y^2 = x^2 - 20x + 100$

$x^3 - 20x^2 + 100x = 100 - 20x + 2x^2$

$x^3 - 22x^2 + 120x - 100 = 0$

$x = 7,1217$

$x_1 = 1,0127$

اگرچه وجوه بسیار است ولیکن بهمین قدر اکتفا نمودیم
المسئلة الخامسة مجذور اذا زید علیه جذره و درهمان او
نقص منه جذره و درهمان کان للمجتمع او الباقی جذر
جواب این عبارت نزد من دو احتمال دارد احتمال اول که ظاهر
از عبارت خلاصه است آنکه شرط یکی از زیاده و نقصان باشد
بعنوان بدلیت یعنی یکی از زیاده یا نقصان کفایت کند در محقق
مسئله که در حقیقت این مسئله راجع بدو مسئله شده است هکذا
مجذور اذا زید علیه جذره و درهمان کان للمجتمع جذر و مجذور
اذا نقص منه جذره و درهمان کان للباقی جذر اما بنا بر فرض اول

اذ

از احتمال اول فرض میکنیم ان مجذور را x^2

پس این تساوی حاصل است $x^2 + x + 2 = y^2$

و فرض میکنیم $y - x = A$

و $y = A + x$

و $y^2 = A^2 + x^2 + 2Ax.$

بعد از گذاشتن مساوی y^2 را در تساوی اول

$$x + 2 = A^2 + 2Ax.$$

$$(2A - 1)\,x = 2 - A^2$$

$$x = \frac{2 - A^2}{2A - 1}$$

$$y = \frac{2 + A^2 - A}{2A - 1}$$

در این دو فرمول کلی مقدار A نامعین پس حاصل میشود بجهة x و y این مقادیر

$A = \ldots\ldots 0,\ \frac{2}{3},\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots\ldots$

$x = \ldots\ldots -2,\ \frac{14}{9},\ 1,\ -\frac{2}{3},\ -1\frac{2}{5},\ -2,\ \ldots\ldots$

$y = \ldots\ldots -2,\ \ldots,\ 2,\ 1\frac{1}{3},\ 1\frac{3}{5},\ 2,\ \ldots\ldots$

اما بنا بر فرض ثانی از احتمال اول فرض میکنیم ان مجذور را x^2 این تساوی حاصل است $x^2 - x - 2 = z^2$



فرض میکنیم $x - z = h$

و $-z = h - x$

و $z^2 = h^2 + x^2 - 2hx$

بعد از گذاشتن مساوی z^2 را در تساوی اول

$-x - 2 = h^2 - 2hx$

$(2h - 1)\,x = h^2 + 2$

$$x = \frac{A^2 + 2}{2h - 1}$$

$$y = \frac{2h^2 - h + 2}{2h - 1}$$

h نیز در اینجا مقدار نامعین است پس حاصل میشود به جهة

x و y این مقادیر

$h = \ldots\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\ \ldots$

$x = \ldots\ -2,\ 3,\ 2,\ 2\frac{1}{5},\ 2\frac{4}{7}\ \ldots$

$y = \ldots\ -2,\ 3,\ 2,\ 5\frac{1}{5},\ 4\frac{2}{7}\ \ldots$

و هرگاه بخواهیم این دو فرض و سایر فرضهای دیگر را بیک

لفظ ادا کنیم باین قسم عمل میکنیم $x^2 \pm x \pm a = y.$

$\pm y \mp x = h$

$\pm y = A \pm x$



$$\pm y^2 = A^2 + x^2 \pm 2Ax.$$

$$\pm x \pm a = A^2 \pm 2Ax.$$

$$(\pm 2A \mp 1)x = \pm a - A^2$$

$$x = \frac{\pm a - A^2}{\pm 2A \mp 1}$$

واگر فرض کنیم که بایه مجذور مطلوب جذر او را افزود و a را نقصان نمود یا جذر را نقصان نمود و a را اضافه کند با

قسم عمل میکنیم $x^2 \pm x \mp a = z^2$

$$z \mp x = A$$

$$\pm z = A \pm x$$

$$z^2 = A^2 + x^2 \pm 2Ax$$

$$\pm x \mp a = A^2 \pm 2Ax$$

$$(\pm A \mp 1)x = \mp a - A^2$$

$$x = \frac{\mp a - A^2}{\pm 2A \mp 1}$$

واحتمال ثانی که ضعیف است انکه هر یک از زیاده و نقصان مدخلیت در تحقق مسئله داشته باشد پس صابر فرض مسئله این دو تساوی حاصل است $x^2 \ldots a + 2 = y^2$



$$x^2 - x - 2 = y^2$$

اولا میتوانیم باین قاعده حل مسئله را نمائیم که در تساوی

اول بتنهائی عمل کنیم تا این دو فرمول حاصل شود

$$x = \frac{2 - A^2}{2A - 1}$$

$$y = \frac{2 + A^2 - A}{2A - 1}$$

و بعد از آن در تساوی دویم بتنهائی عمل کنیم تا این دو فرمول

$x = \frac{2 + A_1^2}{2A_1 - 1}$ $y_1 = \frac{2A_1^2 - A_1 + 2}{2A_1 - 1}$ نیز حاصل شود

چون A در این دو فرمول x مقداری است نامعین پس

حاصل میشود بجهة x دو سلسله مقادیر ما لانهایه له حال

جستجو میکنیم در این دو سلسله مقادیر مقداری را که مشترک

باشد در هر دو سلسله که او مقدار x است بجهة آنکه صدق

میکند در تساوی اول از بابت اینکه از فرمول اول است و صدق

میکند در تساوی دویم از بابت اینکه از فرمول دویم است

وجه ثانی اعاده میکنیم دو تساوی اول را

$$x^2 + x + 2 = y^2 \quad (1)$$

$$x^2 - x - 2 = z^2 \quad (2)$$

بعد از جمع نمودن دو تساوی این تساوی حاصل است

$$2x^2 = z^2 + y^2 \qquad (۲)$$

فرض میکنیم $x - z = A$

و $x = A + z$

و $x^2 = A^2 + z^2 + 2Az$

$$2x^2 = 2A^2 + 2z^2 + 4Az$$

بعد از گذاشتن مساوی $2x^2$ را در تساوی سیم

$$2A^2 + z^2 + 4Az = y^2$$

$$z^2 + 4Az = y^2 - 2A^2$$

$$z = -2A \pm \sqrt{y^2 + 2A^2}$$

حال چون که z باید مقدار حقیقی باشد پس مقدار زیر رادیکال باید یک مجذور حقیقی باشد فرض میکنیم $y^2 + 2A^2 = R^2$

خلاصه بعد از عمل کردن در این تساوی حاصل میشود بجهة y و A و R این سه فرمول کلی

$$A = 2pq$$

$$R = p^2 + 2q^2$$

$$y = p^2 - 2q^2$$

p و q در این سه فرمول مقادیر نامعین هستند پس حاصل میشود بجهة z

$$z = -2A + R = p^2 + 2q^2 - 4pq$$

و چون فرض که این $x = p^2 + 2q^2 - 2pq$

پس $x = p^2 + 2q^2 - 2pq$

$y = p^2 - 2q^2$

$z = p^2 + 2q^2 - 2pq$

حال حاصل میشود بجهت x و y و z جوابها الی غیر نهایة ولیکن
جمیع این جوابها صدق نمیکند در تساویهای اول و دویم پس باید جستجو
نمود میان مقادیر x مقداری را که هرگاه بگذاریم در تساوی
یا در تساوی دویم صدق نماید پس مجذور آن مقدار مجذور (۱)
مطلوبست و باید دانست که این مجذور یافت نمیشود در اعداد صحاح
زیرا که در قواعد مجذورات مبین شده است که چون جذر هر مجذور
مضاعف نمایند و واحدی بران علاوه نموده مجموع را بران مجذور
اضافه کنند مجذور تالی آن حاصل میشود مثلا ۲۵ مجذور است و جذر
آن ۵ و مضاعف آن ده چون واحد اضافه آن نمایند یازده میشود
چون یازده را اضافه ۲۵ نمایند ۳۶ میشود که مقدار تالی ۲۵ است
و این قاعده مطرد است در اعداد صحاح و معلوم است که ضعف جذر
بعلاوه واحد همیشه بزرگتر است از جذر بعلاوه دو و در غیر مجذور
واحد کما لا یخفی پس اگر آن عدد صحیح باشد لازم میاید که مابین دو مجذور

متوالی مجذوور واسطه یافت شود هذا خلف چون عدم تحقق
یک شرط از شروط لازم دارد عدم تحقق مشروط را مطلقا از
این جهت حاجت گفتگو در تحقق شرط ثانی با عدم تحقق آن نیست
وهم چنین یافت نمیشود در اعداد کسور زیرا که کلیه جذور کسور
همیشه بزرگتر است از مجذورش پس اگر جذر را فقط اسقاط کنیم
از مجذورش باقی مانده عدد منفی میشود و عدد منفی جذر ندارد
وچون مسئله ثانیه نیز منتهی شده بود باین تساوی $2x^2 = y^2 + z^2$
پس بعد از عمل نمودن در این تساوی این فرمولات حاصل
میشود

$$x = p^2 + 2q^2 - 2pq$$
$$y = p^2 - 2q^2$$
$$z = p^2 + 2q^2 - 4pq$$

ولیکن جمیع این مقادیر نیز در تساویهای اول صدق نمیکند پس
باید جستجو نمود در میان مقادیر x مقداری را که در این تساوی
$x^2 + 10 = y^2$ یا در این تساوی $x^2 - 10 = z^2$
صدق نماید پس بعد از یافتن آن مقدار x مطلوب است واگر
مقصود سائل از مسئله این باشد که بعد از تحویل تساوی این
تساویها حاصل شود (۱)

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + x - 2 = y^2 \\ x^2 - x + 2 = z^2 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + x - 2 = y^2 \\ x^2 + x + 2 = z^2 \end{array}\right\} \quad (2)$$

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + x - 2 = y^2 \\ x^2 - x - 2 = z^2 \end{array}\right\} \quad (3)$$

میتوانیم جمیع این تساویها را حل نمائیم بقاعده که اول مذکور شد

المسئلة السادسة ثلاثة مربعات متناسبة مجموعها مربع

جواب چون در این مسئله بیان ننموده که این مربعات بچه نسبت حاصل باشند پس میتواند نسبت عددی قصد کرده باشد و میتواند نسبت هندسی اولا فرض میکنیم که نسبت عددی قصد کرده باشد پس این تساویها حاصل است $x^2 + y^2 + z^2 = v^2$

$x^2 . y^2 : y^2 . z^2$

از تساوی دویم $x^2 = 2y^2 - z^2$

بعد از گذاشتن مساوی x^2 را در تساوی اول حاصل میشود

$3y^2 = v^2$ بعد از گرفتن جذر $\sqrt{3y^2} = v$

پس $\sqrt{3} . y = v$

در این تساوی اخری میتوانیم y را هر مقداری که بخواهیم فرض نمائیم پس اگر ضرب کنیم او را در جذر سه حاصل مساوی v میشود بمقدار

تقریبی و چون v باید مقدار حقیقی باشد پس این مسئله مستحیل است
و یافت نمیشود سه مجذور متناسب بتناسب عددی که مجموع آنها
مجذور باشد و ثانیاً فرض میکنیم که نسبت هندسی قصد کرده باشد
پس حاصل میشود این دو تساوی (۱) $x^2+y^2+z^2=v^2$

(۲) $x^2 : y^2 :: y^2 : z^2$

و $x : y :: y : z$

$$y^2 = xz$$

بعد از گذاشتن مساوی y^2 را در تساوی اول حاصل میشود

$$x^2+xz+z^2=v^2$$

خلاصه بعد از عمل کردن حاصل میشود بجهة x و z و v
این فرمولات

$$x = 2pq+q^2$$

$$z = p^2-q^2$$

$$v = p^2+pq+q^2$$

p و q در این فرمولات هستند مقادیر نامعین پس حاصل
میشود بجهة x و z و v از مقادیر نامعین ولیکن جمیع
این مقادیر صدق نمیکنند در تساویهای اول زیرا اگر حاصل ضرب
xz در همه صور مجذور صحیح نمیشود و فرض نموده بودیم او را

مساوی y^2 یعنی $y^2 = x^2$ پس باید p و q را مقداری فرض نمائیم

که چون x و z معلوم شدند حاصل ضرب شان یکمجذور صحیح

باشد پس آنمقدار x حقیقی است و z و y و y^2 از آن قرار معین

میشوند المسئلة التاسعة مکعب قسم بقسمین مکعبین جواب

بنا بر فرض صدق مسئله این تساوی حاصل است

$$x^3 + y^3 = z^3 \qquad (1)$$

فرض میکنیم $A = z - x - y$ و $z = A + x + y$

$$z^3 = A^3 + 3A^2x + 3A^2y + 3Ax^2 + 6Axy + 3Ay^2 + 3x^2y + 3xy^2 + x^3 + y^3$$

$$z^3 =$$

$$0 = A^3 + 3A^2x + 3A^2y + 3Ax^2 + 6Axy + 3Ay^2 + 3x^2y + 3xy^2 \qquad (2)$$

$$(3A + 3y)x^2 + (3A^2 + 6Ay + 3y^2)x + (A^3 + 3A^2y + 3Ay^2) = 0$$

$$x^2 + \left(\frac{3A^2 + 6Ay + 3y^2}{3A + 3y}\right)x + \left(\frac{A^3 + 3A^2y + 3Ay^2}{3A + 3y}\right) = 0$$

$$(3) \qquad x = -\left(\frac{3A^2 + 6Ay + 3y^2}{6A + 6y}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{3A^2 + 6Ay + 3y^2}{6A + 6y}\right)^2 - \frac{2A^3 + 6A^2y + 6Ay^2}{6A + 6y}} = -\alpha \pm$$

$$\pm\sqrt{\frac{9A^4 + 36A^3y + 54A^2y^2 + 36Ay^3 + 9y^4 - (12A^4 + 48A^3y + 72A^2y^2 + 36Ay^3)}{(6A + 6y)^2}} =$$

$$\frac{-(3A^2 + 6Ay + 3y^2) \pm \sqrt{9y^4 - 18A^2y^2 - 12A^3y - 3A^4}}{6A + 6y}$$

حال چون x باید مقدار حقیقی باشد پس باید مقدار زیر رادیکال

یک مجذور حقیقی باشد پس فرض میکنیم او را مساوی z^2 پس

(۴) این تساوی حاصل است $9y^4 - 18A^2y^2 - 12A^3y - 3A^4 = q^2$

حال فرض میکنیم $9 = m^2$, $-18A^2 = C$

$(-12A^3) = D$, $(-3A^4) = E$

پس تحویل میشود تساوی (۴) باین تساوی

$m^2y^4 + Cy^2 + Dy + E = q^2$ (۵)

خلاصه بعد از عمل نمودن در این تساوی این فرمول کلی حاصل آمد

$y = \frac{C^2 - 4Em^2}{4Dm^2}$ (۶)

حال هرگاه A را واحد فرض نمائیم و مساوی بها m^2
و C و D و E را در ان فرمول بگذاریم حاصل میشود مجهول
بجهة y منهای واحد یعنی $y = -1$ و هرگاه فرض
نمائیم $A=2$ حاصل میشود $y = -2$ و هرگاه فرض نمائیم
$A = 3$ حاصل میشود $y = -3$ و همچنین هرگاه فرض
نمائیم $A = -1$ حاصل میشود $y = 1$ و هرگاه فرض نمائیم
$A = -2$ حاصل میشود $y = 2$ و اگر فرض نمائیم
$A = -3$ حاصل میشود $y = 3$ و همچنین اگر فرض
نمائیم $A = 0$ حاصل میشود $y = 0$ و چون این مقادیر
y را بگذاریم در تساوی (۴) حاصل میشود در جمیع حالات

بجهة q صفر یعنی $q = 0$ وهرگاه مقادیر A و y و q را بگذاریم در تساوی (۳) حاصل میشود در جمیع حالات بجهة x صفر یعنی $x = 0$ وهرگاه در تساوی (۲) بجهة کوئفیسیانهای y^2، y فاکتر یکبر یعنی y را مجهول فرض نمائیم پس بعد از عمل کردن حاصل میشود $9x^4 - 18A^2x^2 - 12A^3x - 3A^4 = q^2$ وکوئفیسیانهای x در این تساوی بعینه همان کوئفیسیانهای y است در تساوی (۲) پس در این تساوی A را هر مقدار فرض نمائیم حاصل میشود نیز بجهة q و y صفر پس معلوم شد که این مسئله مستحیل است زیرا که اگر جواب عددی داشت حاصل می شد اگر یکی از این فروض بجهة q و x یکمقدار عددی

ولیکن اگر فرض کنیم که یکمسئله منتهی شده است باین تساوی

$$y^4 + 3y^2 - 5y + 6 = q^2$$

و بخواهیم که مقادیر y و q را معین نمائیم کوئفیسیانهای این تساوی را بگذاریم در فرمول (۶) حاصل میشود بجهة y، $\frac{3}{2}$ یعنی $y = \frac{3}{2}$ و $q = \frac{33}{4}$

وهم چنین هرگاه فرض نمائیم در یکمسئله $y = -2$ و بعد از آنکه عمل نمائیم در آن تساوی حاصل میشود اینجمله $4y^4$ [illegible] $y^2 - 5y - 13$

داز:

والا از خارج میدانیم که y در اینجا مساوی است بعینهای ۲ و ۳

حاصل جمع این جمله مساوی است به ۴۹ ولیکن میخواهیم بدانیم

که اگر بواسطه این فرمول عمل کنیم بجهت y و حاصل جمع چه مقدار آید

حاصل میشود پس فرض میکنیم او را مساوی q^2 پس حاصل میشود

این تساوی $4y^4-3y^2-5y-12=q^2$ و بعد از وضع کردن

قیمتهای آنها را در فرمول (۹) حاصل میشود بجهت y این مقدار

$-\frac{217}{10}$ یعنی $y=-\frac{217}{10}$

و $q=\frac{19378}{9400}$

پس معلوم شد که این فرمول کلی است و هر تساوی که باین صورت

نوشته شود $m^2y^4+cy^2+Dy+E=q^2$

بواسطه این فرمول حل میشود پس واضح شد که مسئله مفروضه

غلط فرض شده است که بواسطه این فرمول جوابی حاصل نشد

والا بایدا قلا یک جواب از او حاصل شود و باینجا ختم نمودیم

گفتگو را در مسائل سبعه

والحال ذکر میکنیم یک تساوی مشکلی را که به بیست و دو وجه از او

حل نموده ام و در ضمن آن بیان میشود یک قاعده مهمه تحویل

نمودن هر تساوی مخلوطی را که از درجات اعلی باشد به درجه

دوقیم بلکه بدرجه اولی ونیز اکثر قواعد جبریه در این ضمن
استعمال میشود و بسیار مفید است از برای متعلمین
وجوهی که منتهی میشود بدرجهٔ دویم

اول

$$\begin{cases} xy + xy^2 = 12 \\ x + xy^3 = 18 \end{cases}$$

$$xy + xy^4 = 18y$$

$$xy + xy^2 = 12$$

$$xy^4 - xy^2 = 18y - 12$$

$$x(y^4 - y^2) = 18y - 12$$

$$x(y^2 + y)(y^2 - y) = 18y - 12$$

$$x(y^2 + y) = 12$$

$$12(y^2 - y) = 18y - 12$$

$$12y^2 - 12y = 18y - 12$$

$$12y^2 - 30y + 12 = 0$$

$$y^2 - \frac{5}{2}y + 1 = 0$$

$$y = 2 , \frac{1}{2}$$

$2x + 4x = 12$ یا $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x = 12$

$9x = 120$ یا $\frac{3}{4}x = 120$

$x = 2$ یا $x = 160$

وجه دوّم

$$\begin{cases} xy + xy^2 = 120 \\ x + xy^2 = 180 \end{cases}$$

$xy + xy^3 = 180y$

$xy + xy^2 = 120$

$xy^3 - xy^2 = 180y - 120$

$xy^2(y^2 - 1) = 180y - 120$

$xy^2(y+1)(y-1) = 180y - 120$

$xy(y+1) = 120$

$$\frac{xy^2(y+1)(y-1)}{xy(y+1)} = \frac{180y - 120}{120} = \frac{3y-2}{2}$$

$y(y+1) = \frac{3y-2}{2}$

$2y^2 - 2y = 3y - 2$

$2y^2 - 5y + 2 = 0$

$y^2 - \frac{5}{2}y + 1 = 0$

$y = 2, \frac{1}{2}$

$2x + 4x = 120$

دوم

$$9 \cdot x = 14 \quad , \quad x = 2 , 160$$

وجه سیم

$$\begin{cases} xy + xy^2 = 120 \\ x + xy^3 = 180 \end{cases}$$

$$\frac{x + xy + xy^2 + xy^3}{x - xy - xy^2 + xy^3} = \frac{30}{6} = 5$$

$$\frac{1 + y + y^2 + y^3}{1 - y - y^2 + y^3} = 5$$

$$\frac{(y^2+1)(y+1)}{(y^2-1)(y-1)} = 5$$

$$\frac{(y^2+1)(y+1)}{(y+1)(y-1)(y-1)} = 5$$

$$\frac{y^2+1}{(y-1)(y-1)} = 5$$

$$y^2 + 1 = 5(y^2 - 2y + 1)$$

$$y^2 + 1 = 5y^2 - 10y + 5$$

$$4y^2 - 10y + 4 = 0$$

$$y^2 - \frac{5}{2}y + 1 = 0$$

$$y = 2 , \frac{1}{2}$$



$$x = 2 , 16$$

وجه چهارم

$$\begin{cases} xy + xy^2 = 120 \\ x + xy^3 = 180 \end{cases}$$

$$xy + xy^4 = 18y$$

$$xy + xy^2 = 12$$

$$xy^4 - xy^2 = 18y - 120$$

$$xy^2(y^2 - 1) = 18y - 12$$

$$x - xy - xy^2 + xy^3 = 60$$

$$x(y^2 - 1)(y - 1) = 60$$

$$\frac{xy^2(y^2-1)}{x(y^2-1)(y-1)} = \frac{18y - 12}{6}$$

$$\frac{y^2}{y-1} = 3y - 2$$

$$y^2 = 3y^2 - 5y + 2$$

$$2y^2 - 5y + 2 = 0$$

$$y^2 - \frac{5}{2}y + 1 = 0$$

$$y = 2 \quad \frac{1}{2}$$

$$x = 2 \ , \ 16$$

وجه پنجم

$$\begin{cases} xy + xy^2 = 120 \\ x + xy^3 = 180 \end{cases}$$

$$xy^4 + xy^3 = 12y^3$$
$$xy^3 + x = 18$$
$$xy^4 - x = 12y^3 - 18$$
$$x(y^4 - 1) = 12y^3 - 18$$
$$x(y^2+1)(y+1)(y-1) = 12y^3 - 18$$
$$x(y+1) = \frac{12}{y}$$
$$\frac{12}{y}(y^2+1)(y-1) = 12y^3 - 18$$
$$12y^3 - 12y^2 + 12y - 12 = 12y^3 - 18y$$
$$-12y^2 + 12y - 12 = -18y$$
$$12y^2 - 30y + 12 = 0$$
$$y^2 - \frac{5}{2}y + 1 = 0$$
$$y = 2 \;,\; \frac{1}{2}$$
$$x \times 3 = \frac{12}{2}$$
$$3x = 9$$
$$x = 2 ,\; 16$$

وجه ششم

$$xy + xy^2 = 12$$
$$x + xy^3 = 18$$

$$xy^{۲} + xy^{۵} = ۱۸y^{۲}$$
$$xy^{۲} + xy = ۱۲$$

$$xy^{۵} - xy = ۱۸y^{۲} - ۱۲$$

$$xy(y^{۴} - ۱) = ۱۸y^{۲} - ۱۲$$

$$xy(y^{۲} + ۱)(y^{۲} - ۱) = ۱۸y^{۲} - ۱۲$$

$$xy(y^{۲} + ۱)(y + ۱)(y - ۱) = ۱۸y^{۲} - ۱۲$$

$$xy(y + ۱) = ۱۲$$

$$۱۲(y^{۲} + ۱)(y - ۱) = ۱۸y^{۲} - ۱۲$$

$$۱۲y^{۳} - ۱۲y^{۲} + ۱۲y = ۱۸y^{۲}$$

$$۱۲y^{۳} - ۳۰y^{۲} + ۱۲y = ۰$$

$$۱۲y^{۲} - ۳۰y + ۱۲ = ۰$$

$$y^{۲} - \frac{۵}{۲}y + ۱ = ۰$$

$$y = ۲ \ , \ \frac{۱}{۲}$$

$$x = ۲ \ , \ ۱۶$$

وجه هفتم

$$\begin{cases} xy + xy^{۲} = ۱۲ \\ x + xy^{۳} = ۱۸ \end{cases}$$

$$xy^{۲} + xy^{۳} = ۱۲y$$
$$x + xy^{۳} = ۱۸$$

$xy^{۲} - x = ۱۲y - ۱۸.$

$xy^{۲} - ۱۲y - x = -۱۸.$

$xy^{۲} + xy = ۱۲.$

$۱۲y + xy + x = ۳۰$

$xy^{۲} + ۱۲y^{۲} + xy = ۳۰y$

$xy^{۲} + xy = ۱۲$

$۱۲y^{۲} = ۳۰y - ۱۲.$

$y^{۲} - \frac{۵}{۲}y + ۱ = ۰$

$y - \frac{۵}{۴} = \pm \frac{۳}{۴}$

$y = ۲ \; , \; \frac{۱}{۲}$

$x + ۸x = ۱۸.$ | $x + \frac{۱}{۸}x = ۱۸$

$۹x = ۱۸.$ | $\frac{۹}{۸}x = ۱۸.$

$x = ۲$ | $x = ۱۶$

وجه هشتم

$xy + xy^{۲} = ۱۲.$

$x + xy = ۱۸.$

$xy^{۲} + xy^{۳} = ۱۲y$

$x + xy^{۳} = ۱۸.$



$$xy^{۲} - x = ۱۲y - ۱۸.$$

$$xy^{۲} - ۱۲y - x = -۱۸.$$

$$xy^{۲} + xy \quad = ۱۲.$$

$$۱۲y + xy + x = ۳۰ \quad \ldots\ldots * $$

$$x + xy + xy^{۲} + xy^{۳} = ۳۰$$

$$(x + xy)(1 + y^{۲}) = ۳۰$$

$$x + xy = \frac{۳۰}{1 + y^{۲}}$$

$$x + xy = ۳۰ - ۱۲y \quad \ldots\ldots * $$

$$\frac{۳۰}{1 + y^{۲}} = ۳۰ - ۱۲y.$$

$$۳۰ = ۳۰ - ۱۲y + ۳۰y^{۲} - ۱۲y^{۳}$$

$$۱۲y^{۳} - ۳۰y^{۲} + ۱۲y = ۰.$$

$$y^{۲} - \frac{۵}{۲}y + 1 = ۰ \qquad y = ۲ \,,\, \frac{1}{۲}.$$

وجه ثانی

$$xy + xy^{۲} = ۱۲.$$

$$x + xy^{۲} = ۱۸.$$

$$xy + xy^{۳} = ۱۲y.$$

$$x + xy^{۳} = ۱۸.$$

$$xy^{۲} - x = ۱۲y - ۱۸.$$

$$x(y^2-1)=12y-18.$$

$$x-xy-xy^2+xy^3=30.$$

$$x(y^2-1)(y-1)=6.$$

$$(12y-18)(y-1)=6.$$

$$12y^2-30y+18=6.$$

$$12y^2-30y+12=0$$

$$y^2-\frac{5}{2}y+1=0$$

$$y-\frac{5}{4}=\pm\frac{3}{4}.$$

$$y=2\ .\ \frac{1}{2}.$$

$$x+8x=18. \qquad x+\frac{1}{8}x=18.$$

$$x=2 \qquad x=16$$

وجوهی که منتهی میشود بدرجه سیم و جذر اول

$$xy+xy^2=12$$

$$x+xy^3=18. \quad \ldots \ast$$

$$xy+xy^4=18y.$$

$$xy+xy^2=12.$$



$$x(y^2-y^4)=12-18y.$$

$$x = \frac{12 - 18y}{y^2 - y^4} \cdots *$$

$$x = \frac{12}{y^2 + y}$$

$$\frac{12 - 18y}{y^2 - y^4} = \frac{12}{y^2 + y}$$

$$12y - 18y^2 + 12y^2 - 18y^3 = 12y^2 - 12y^4$$

$$12y^4 - 18y^3 - 18y^2 + 12y = 0$$

$$2y^3 - 3y^2 - 3y + 2 = 0$$

$$y^3 - \frac{3}{2}y^2 - \frac{3}{2}y + 1 = 0$$

وجه ثانی

$$x = \frac{18}{1 + y^3} \cdots *$$

$$x = \frac{12 - 18y}{y^2 - y^4} \cdots *$$

$$\frac{12 - 18y}{y^2 - y^4} = \frac{18}{1 + y^3}$$

$$12 - 18y + 12y^3 - 18y^4 = 18y^2 - 18y^4$$

$$2y^3 - 3y^2 - 3y + 2 = 0$$

وجه ثالث

$$xy + xy^2 = 12$$

$$x + xy^3 = 18$$

$$xy + xy^2 + \frac{xy + xy^2}{2} = x + xy^3$$



وجه رابع

$$٣xy + ٣xy^{٢} = ٢x + ٢xy^{٣}.$$
$$٣y + ٣y^{٢} = ٢ + ٢y^{٣}$$
$$٢y^{٣} - ٣y^{٢} - ٣y + ٢ = ٠$$

وجه رابع

$$xy + xy^{٢} = ١٢.$$
$$x + xy^{٣} = ١٨.$$

$$\frac{xy + xy^{٢}}{x + xy^{٣}} = \frac{١٢}{١٨} = \frac{٢}{٣}.$$
$$\frac{y + y^{٢}}{١ + y^{٣}} = \frac{٢}{٣}.$$
$$٣y + ٣y^{٢} = ٢ + ٢y^{٣},\quad ٢y^{٣} - ٣y^{٢} - ٣y + ٢ = ٠$$

وجه خامس

$$xy + xy^{٢} = ١٢.$$
$$x + xy^{٣} = ١٨.$$

$$x(y + y^{٢}) = ١٢$$
$$x = \frac{١٢}{y + y^{٢}}.$$
$$x(١ + y^{٣}) = ١٨.$$
$$x = \frac{١٨}{١ + y^{٣}}.$$
$$\frac{١٢}{y + y^{٢}} = \frac{١٨}{١ + y^{٣}}.$$
$$١٢ + ١٢y^{٣} = ١٨y + ١٨y^{٢}.$$
$$١٢y^{٣} - ١٨y^{٢} - ١٨y + ١٢ = ٠$$
$$٢y^{٣} - ٣y^{٢} - ٣y + ٢ = ٠$$

وجه سادس

$$xy + xy^2 = 120$$
$$x + xy^3 = 180$$

$$x - xy - xy^2 + xy^3 = 90$$
$$\frac{xy + xy^2}{2} = 90$$
$$2x + 2xy^3 - 2xy - 2xy^2 = xy + xy^2$$
$$2 + 2y^3 - 2y - 2y^2 = y + y^2$$
$$2y^3 - 3y^2 - 3y + 2 = 0$$

وجه سابع

$$xy + xy^2 = 120$$
$$x + xy^3 = 180$$

$$x + xy + xy^2 + xy^3 = 300$$
$$x(1 + y + y^2 + y^3) = 300$$
$$x(y^2 + y) = 120$$
$$x = \frac{120}{y^2 + y}$$
$$120 + 120y + 120y^2 + 120y^3 = 300y + 300y^2$$
$$2 + 2y + 2y^2 + 2y^3 = 5y + 5y^2$$
$$2y^3 - 3y^2 - 3y + 2 = 0$$

وجه ثامن

$$x = \frac{180}{1 + y^3}$$

$$18 + 18y + 18y^2 + 18y^3 = 30 + 30y^3$$

$$12y^3 - 18y^2 - 18y + 12 = 0$$

$$2y^3 - 3y^2 - 3y + 2 = 0$$

وجه رابع

$$xy + xy^2 = 120$$
$$x + xy^3 = 180$$

$$x + xy + xy^2 + xy^3 = 300$$

$$x - xy - xy^2 + xy^3 = 60$$

$$\frac{x + xy + xy^2 + xy^3}{x - xy - xy^2 + xy^3} = \frac{300}{60} = 5$$

$$\frac{1 + y + y^2 + y^3}{1 - y - y^2 + y^3} = 5$$

$$1 + y + y^2 + y^3 = 5 - 5y - 5y^2 + 5y^3$$

$$4y^3 - 6y^2 - 6y + 4 = 0$$

$$2y^3 - 3y^2 - 3y + 2 = 0$$

وجوهی که منتهی میشود بجذر چهارم

وجه اول

$$xy + xy^2 = 120$$
$$x + xy^3 = 180$$

$$x^2y + x^2y^2 + x^2y^4 + x^2y^5 = 2160$$

$$6x + 6xy^3 + 9xy + 9xy^2 = 2160$$

$$x^2y + x^2y^2 + x^2y^4 + x^2y^5 = 6x + 6xy^3 + 9xy + 9xy^2$$



$$xy + xy^2 + xy^4 + xy^5 = 6 + 6y^3 + 9y + 9y^2$$

$$x(y + y^2 + y^4 + y^5) = 6 + 6y^3 + 9y + 9y^2$$

$$x = \frac{12}{y + y^2}$$

$$12y + 12y^2 + 12y^4 + 12y^5 = 6y + 6y^4 + 9y^3 +$$

$$+ 9y^3 + 6y^2 + 6y^5 + 9y^3 + 9y^4$$

$$4 + 4y + 4y^3 + 4y^4 = 2 + 2y^3 + 3y + 3y^2 +$$

$$+ 2y + 2y^4 + 3y^2 + 3y^3$$

$$2y^4 - y^3 - 6y^2 - y + 2 = 0$$

وجه دوّم

$$xy + xy^2 = 120$$

$$x + xy^3 = 180$$

$$x^2y^2 + x^2y^4 + 2x^2y^3 + \frac{x^2y^2 + x^2y^4 + 2x^2y^3}{2}$$

$$= x^2y + x^2y^2 + x^2y^4 + x^2y^5$$

$$3x^2y^2 + 3x^2y^4 + 6x^2y^3 = 2x^2y + 2x^2y^2 + 2x^2y^4 + 2x^2y^5$$

$$3y^2 + 3y^4 + 6y^3 = 2y + 2y^2 + 2y^4 + 2y^5$$

$$2y^5 - y^4 - 6y^3 - y^2 + 2y = 0$$

$$2y^4 - y^3 - 6y^2 - y + 2 = 0$$

وجهی که منتهی میشود بمخلوطی از درجهٔ پنجم

$$xy + xy^2 = 12$$

$$x + xy^3 = 18$$



$$x^4y + x^2y^2 + x^2y^4 + x^2y^5 = 216$$

$$\sqrt{x^2y + x^2y^2 + x^2y^4 + x^2y^5} = 6$$

$$\frac{xy + xy^2}{2} = 6$$

$$8x^2y + 8x^2y^2 + 8x^2y^4 + 8x^2y^5 = x^3y^3 + 3x^3y^4 + 3x^3y^5 + x^3y^6$$

$$8y + 8y^2 + 8y^4 + 8y^5 = xy^3 + 3xy^4 + 3xy^5 + xy^6$$

$$8 + 8y + 8y^3 + 8y^4 = xy^2 + 3xy^4 + 3xy^3 + xy^5$$

$$x(y^2 + 3y^3 + 3y^4 + y^5) = 8 + 8y + 8y^3 + 8y^4$$

$$x = \frac{12}{y + y^2}$$

$$12y^2 + 36y^3 + 36y^4 + 12y^5 = 8y + 8y^2 + 8y^4 + 8y^5 +$$

$$+ 8y^2 + 8y^3 + 8y^5 + 8y^6$$

$$3y + 9y^2 + 9y^3 + 3y^4 = 2 + 2y + 2y^3 + 2y^4 +$$

$$+ 2y + 2y^2 + 2y^4 + 2y^5$$

$$2y^5 + y^4 - 7y^3 - 7y^2 + y + 2 = 0$$

وجهی که منتهی میشود بمخلوطی از درجهٔ ششم

$$xy + xy^2 = 12$$

$$x + xy = 18$$

$$x^2y^2 + x^2y^4 + 2x^2y^3 + \frac{x^2y^2 + x^2y^4 + 2x^2y^3}{2} +$$

$$+x^2y^2 + x^2y^4 + 2x^2y^3 = x^2 + 2x^2y^3 + x^2y^6$$

$$\frac{9x^2y^2 + 9x^2y^4 + 18x^2y^3}{4} = x^2 + x^2y^6 + 2x^2y^3$$

$$9x^2y^2 + 9x^2y^4 + 18x^2y^3 = 4x^2 + 4x^2y^6 + 8x^2y^3$$

$$9y^2 + 9y^4 + 18y^3 = 4 + 4y^6 + 8y^3$$

$$4y^6 - 9y^4 - 10y^3 - 9y^2 + 4 = 0$$

بهمان طریق که جستجو نمودیم بجهة تعیین y میتوانیم جستجو نمائیم بجهة تعیین x وغیر از وجوه مذکوره وجوه دیگر نیز بسیار است ولیکن ما بهمین قدر اکتفا نمودیم مخفی نماند که چون عمل جبری منتهی شود بمخلوطی از درجه سیم و بالاتر اهل اروپا دیگر تصرف در ان نمینمایند جز تصرف مخصوص که در حل مخلوطی از ان درجه بیان نموده اند و ان تصرف بغایت صعب و مشکل است و با زحمت زیاد جواب حاصل میشود ولکن ما بعنایت الله تعالی و حسن تربیت بندگان اقدس شهریاری خلد الله ملکه ملهم شدیم بیک قاعده بسیار سهل که جاری میشود در جمیع معادلات از هر درجه که بوده باشد و نامیدیم

او را بقاعده تحویل و ان قاعده این است

که در یکمسئله هرگاه عمل نمائیم تا انکه منتهی شود بمخلوطی از درجه m بعد بطریق دیگر عمل میکنیم تا انکه منتهی شود بمخلوطی از

در حبر $m+n$ یا $m-n$ خال تقسیم میکنیم

مخلوطی درجهٔ بزرکتر را بر مخلوطی درجهٔ کوچکتر و در میان این

مقسوم و مقسوم علیه یکی از سه نسبت یافت می شود یا تداخل یا

توافق یا تباین اما تداخل این است که تقسیم میکنیم مخلوطی درجهٔ

بزرکتر را بر مخلوطی از درجهٔ کوچکتر خارج قسمت بمقدار کاملی است

بی کسر که مساوی صفر است زیرا که مقسوم و مقسوم علیه مساوی صفر

بودند پس هرکاه این خارج قسمت یك تساوی مخلوطی از درجهٔ دویم

باشد عمل میکنیم و ریشهای او را معلوم میکنیم و بواسطهٔ این ریشها

ریشهای مقسوم و مقسوم علیه را نیز تعیین میکنیم و هرکاه خارج قسمت

از درجهٔ دویم نباشد پس بواسطهٔ او و مقسوم و مقسوم علیه یك تساوی

دیکر حاصل میکنیم و هم چنین عمل میکنیم تا منتهی شود بمخلوطی از درجهٔ

دویم یا اول اما توافق این است که خارج قسمت بمقدار

صحیح کاملی نیست مشتمل بر صحیح و کسر است پس جستجو میکنیم وفقهای

یعنی مقسوم علیه مشترک میان این دو تساوی بعد تقسیم میکنیم مقسوم

و مقسوم علیه را بر این مقدار مشترک و این دو خارج قسمت نیز مساوی

صفرند پس اکر از درجهٔ اول یا دویم باشند که ریشهای اینها را معین

میکنیم و اکر از درجهٔ سیم یا بالاتر باشند نیز همین طریق عمل میکنیم تا

منتهی

منتهی شود بدرجه دویم یا اول **اما تباین** این است که نه خارج
قسمت کاملی حاصل شود و نه مقسوم علیه مشترک یافت شود پس در
این حالت بواسطه این دو تساوی نمیتوانیم تحویل حاصل نمائیم تا باید
نیز بطریق دیگر عمل کنیم تا یک تساوی دیگر حاصل شود و بواسطه
این تساویها عمل کنیم تا منتهی شود بدرجه اول یا دویم **سبب**
تداخل اینست که مخلوطی درجه بزرگتر حاوی است جمیع ریشهای
درجه کوچکتر را بعلاوه چند ریشه دیگر و **سبب توافق**
اینست که بعضی از ریشها مشترک هستند و بعضی مختص و **سبب**
تباین این است که هیچ ریشه یافت نمیشود که مشترک باشد
مابین این دو تساوی و نتیجه می بخشد که عدد جوابهای مسئله
مساوی است بحاصل جمع ریشهای آن دو تساوی و بجهة
توضیح این مطالب میگوئیم چونکه چند وجه از وجوه حل تساوی
مذکوره منتهی شده است به تساوی مخلوطی از درجه سیم و چند وجه نیز
بتساوی مخلوطی از درجه چهارم پس تقسیم میکنیم اخیر را که این است
$2y^4 - y^3 - 6y^2 - y + 2 = 0$ براولی که این است
$2y^3 - 3y^2 - 3y + 2 = 0$ بعد از تقسیم خارج قسمت $y+1$
میشود نتیجه $2y^4 - y^3 - 6y^2 - y + 2 : 2y^3 - 3y^2 - 3y + 2 = y + 1$

وچونکه مقسوم و مقسوم علیه مساوی صفر بودند پس خارج قسمت نیز مساوی صفر میشود یعنی $y+1=0$ و نیز تقسیم میکنیم تساوی مخلوطی از درجه سیم را باین خارج قسمت بعد از تقسیم خارج قسمت $2y^2-5y+2$ میشود یعنی

$$2y^3-3y^2-3y+2 : y+1 = 2y^2-5y+2$$

وچونکه مقسوم و مقسوم علیه مساوی صفر بودند پس خارج قسمت نیز مساوی صفر میشود یعنی $2y^2-5y+2=0$ پس تحویل نمودیم تساوی مخلوطی از درجه چهارم را بمخلوطی از درجه دویم و همچنین یك تساوی منتهی شده بود از درجه پنجم پس تقسیم میکنیم او را بمخلوطی از درجه چهارم خارج قسمت $y+1$ میشود یعنی

$$2y^5+y^4-7y^3-7y^2+y+2 : 2y^4-y^3-6y^2-y+2 = y+1$$

وچونکه مقسوم و مقسوم علیه مساوی صفر بودند پس خارج قسمت نیز مساوی صفر میشود یعنی $y+1=0$ و این راجع شد بطریق اول پس تحویل نمودیم نیز مخلوطی از درجه پنجم را بدرجه دویم و نیز یکی که منتهی شده بود بمخلوطی از درجه ششم در اینجا بدو طریق میتوانیم تحویل کنیم اول آنکه تقسیم میکنیم او را بمخلوطی از درجه سیم خارج قسمت $2y^3+3y^2+3y+2$ میشود یعنی

$$4y^6-9y^4+10y^3-9y^2+4 : 2y^3-3y^2-3y+2 = 2y^3+3y^2+3y+2.$$

وچونکه مقسوم و مقسوم علیه مساوی صفر بودند پس خارج قسمت نیز مساوی

صفر بودند پس خارج قسمت نیز مساوی صفر میشود یعنی

$2y^3+3y^2+3y+2=0$ بعد تقسیم میکنیم نیز همین تساوی مخلوطی

درجه ششم را بمخلوطی از درجه چهارم باینطریق $4y^6-9y^4-10y^3$

$-9y^2+4 : 2y^4-y^3-6y^2-y+2 = 2y^2+y+2$

وخارج قسمت نیز مساوی صفر است یعنی $2y^2+y+2=0$

حال تقسیم میکنیم خارج قسمت اول را باین خارج قسمت حاصل میشود

بعد از تقسیم $y+1$ باین طریق

$2y^3+3y^2+3y+2 : 2y^2+y+2 = y+1$

واین خارج قسمت نیز مساوی صفر است پس عمل راجع شد بطریق اولیه

ثانی بعد از مجذور کردن مخلوطی درجه سیم این تساوی حاصل است

$4y^6-12y^5-3y^4+26y^3-3y^2-12y+4=0$

حال تفریق میکنیم این تساوی را از تساوی اول باینطریق

$$+4y^6+0-9y^4-10y^3-9y^2+0+4=0$$
$$\pm 4y^6 \mp 12y^5 \mp 3y^4 \pm 26y^3 \mp 3y^2 \mp 12y \pm 4=0$$

$$12y^5-6y^4-36y^3-6y^2+12y=0$$

$$2y^4-y^3-6y^2-y+2=0$$

واین عمل منتهی شد بمخلوطی درجه چهارم وکیفیت تحلیل نمودن آن

بتفصیل مذکور شد سابقاً پس تحویل نمودیم یک مخلوطی از درجه ششم را بمخلوطی از درجه دوم وهو المطلوب و همچنین هرگاه تقسیم کنیم مخلوطی درجه پنجم را بدرجه سیم خارج قسمت $y^2 + 2y + 1 = 0$ میشود یعنی

$$2y^5 + y^4 - 2y^3 - 2y^2 + y + 2 : 2y^3 - 3y^2 - 3y + 2 = y^2 + y + 1$$

و این خارج قسمت یکجذر حقیقی است از $y + 1$ و باقی عمل بنحو سابق مذکور شد و حالت توافق از تقریر این اعمال واضح است اما حالت تباین ظاهر خواهد شد در تساوی آتیه

$$xy + xy^2 + xy^3 = 280$$
$$x + xy^4 + xy^5 = 980$$

سؤال دوم [illegible] ۱۳۰[illegible]

$$\frac{x + xy + xy^2 + xy^3 + xy^4 + xy^5}{x - xy - xy^2 - xy^3 + xy^4 + xy^5} = \frac{63}{35} = \frac{9}{5}$$

$$\frac{1 + y + y^2 + y^3 + y^4 + y^5}{1 - y - y^2 - y^3 + y^4 + y^5} = \frac{9}{5}$$

$$\frac{(y^2 + y + 1)(y^3 + 1)}{(y^2 + y - 1)(y^3 - 1)} = \frac{9}{5}$$

$$\frac{(y^2 + y + 1)(y^3 + 1)}{(y^2 + y - 1)(y^2 + y + 1)(y - 1)} = \frac{9}{5}$$

$$\frac{y^3 + 1}{(y^2 + y + 1)(y - 1)} = \frac{9}{5}$$

$$9y^3 - 18y + 9 = 5y^3 + 5$$
$$4y^3 - 18y + 4 = 0$$
$$2y^3 - 9y + 2 = 0$$
$$(2y^2 + 4y - 1)(y - 2) = 2y^3 - 9y + 2$$
$$y = 2$$
$$y^2 + 2y = \frac{1}{2}$$
$$y = -1 \pm \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{-2 \pm \sqrt{6}}{2}$$

$$xy + xy^{۲} + xy^{۳} = ۲۸۰$$
$$x + xy^{۴} + xy^{۵} = ۹۸۰$$

$$xy^{۵} + xy^{۴} + xy^{۳} = ۲۸۰y^{۲}$$
$$-xy^{۵} \pm xy^{۴} \pm x = -۹۸۰$$

$$xy^{۳} - x = ۲۸۰y^{۲} - ۹۸۰$$

$$x(y^{۲} + y + ۱)(y - ۱) = ۲۸۰y^{۲} - ۹۸۰$$

$$xy(y^{۲} + y + ۱) = ۲۸۰$$

$$\frac{y - ۱}{y} = \frac{۲۸۰y^{۲} - ۹۸۰}{۲۸۰}$$

$$۲۸۰y - ۲۸۰ = ۲۸۰y^{۳} - ۹۸۰y$$

$$۲y^{۳} - ۹y + ۲ = ۰$$

$$xy + xy^{۲} + xy^{۳} = ۲۸۰$$
$$x + xy^{۴} + xy^{۵} = ۹۸۰$$

$$\frac{x + xy + xy^{۲} + xy^{۳} + xy^{۴} + xy^{۵}}{x - xy - xy^{۲} - xy^{۳} + xy^{۴} + xy^{۵}} = \frac{۹}{۵}$$

$$\frac{۱ + y + y^{۲} + y^{۳} + y^{۴} + y^{۵}}{۱ - y - y - y^{۳} + y^{۴} + y^{۵}} = \frac{۹}{۵}$$

$$۵ + ۵y + ۵y^{۲} + ۵y^{۳} + ۵y^{۴} + ۵y^{۵} =$$
$$= ۹ - ۹y - ۹y^{۲} - ۹y^{۳} + ۹y^{۴} + ۹y^{۵}$$

$$۲y^{۵} + ۲y^{۴} - ۷y^{۳} - ۷y^{۲} - ۷y + ۲ = ۰$$

هرگاه تقسیم کنیم مخلوطی در جهه پنجم را بر مخلوطی درجه ستیم بعد از تقسیم خارج

قسمت این ۰ = ۱ + لا + لا میشود حال هرگاه در مخلوطی

درجه سیم و این خارج قسمت تامل کنیم معلوم میشود که نسبت بتاین دارند

زیرا که نه خارج قسمت کاملی و نه مقسوم علیه مشترکی یافت میشود پس بواسطه

این دو تساوی بجواب حاصل نمیشود باید باستعانت یکتساوی دیگر

تحویل کنیم و باید دانست که هر قدر در مسئله مجهولات زیاد تر باشد که

تحصیل جواب بقواعد دیگر مشکل است مجال تصرف در این قاعده

بیشتر است و زودتر بجواب میتوان رسید و در هر مسئله که یک

مجهول زیاده نباشد این قاعده در ان جاری نمیشود زیرا که زیاده

از یک تصرف قبول نمیکند و لامحاله منتهی میشود بدرجه مخصوصی و

چونکه مقصود ما در این رساله بانجام رسید ختم آن بدعای پادشاه

دین پناه لازم نمود خلد الله ملکه واعز جنده وافاض علی البریة

بره بقیت بقاء الدهر یکف اهله وهذا دعاء للبریة شامل

همیشه تا که بر افلاک انجمند پدید همیشه تا که بر ارواح قائمند اجسام

مباد جز بهوای تو گردش گردون

مباد جز برضای تو جنبش اجرام

امین امین

امین

